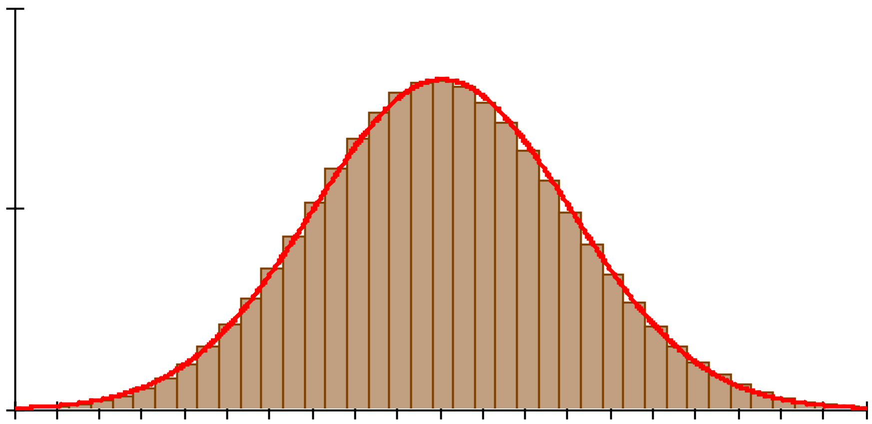
Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Histogramme von Binomialverteilungen sind für nicht zu kleine n glockenförmig.
Mit größer werdendem n tritt die Glockenform immer deutlicher hervor.
Die Histogrammform nähert sich mit größer werdendem n immer mehr der Gaußschen Verteilungskurve, auch Glockenkurve genannt.
Die gesamte Fläche zwischen der Kurve und der waagerechten Achse hat den Wert 1. Das gilt ebenso für die Summe aller Säulenflächen.

Funktionsgleichung der Glockenkurve: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



Approximation der Binomialverteilung durch die Gaußsche Normalverteilung

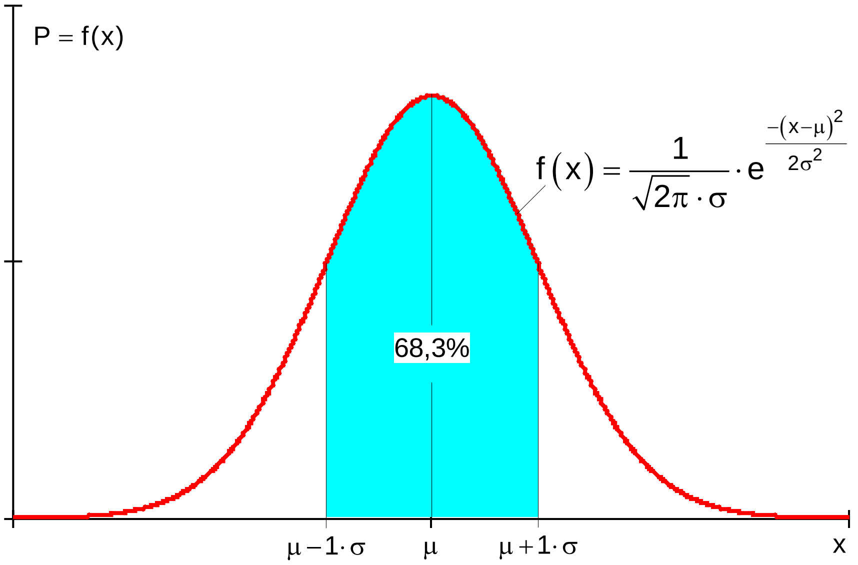
Dies ermöglicht es für große n, Wahrscheinlichkeiten in einem bestimmten Intervall näherungsweise zu bestimmen.

Die Fläche, die die Normalverteilung mit der x – Achse einschließt,

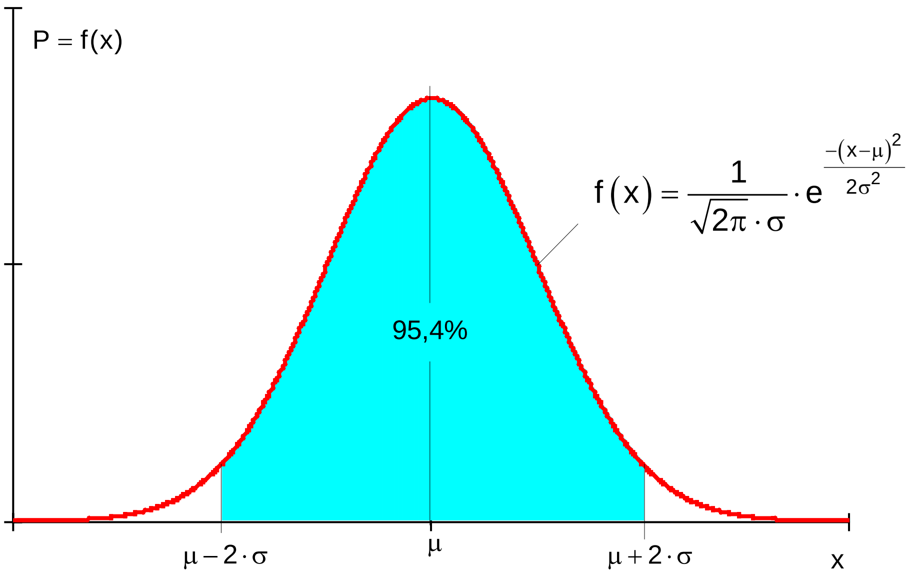
lässt sich über das Integral $\int_a^b f(x) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ berechnen.

Die Berechnung der Fläche mit dem Integral ist recht mühsam, deshalb gibt es Tabellen in denen die Wahrscheinlichkeit von Sigma- Umgebungen aufgelistet sind.

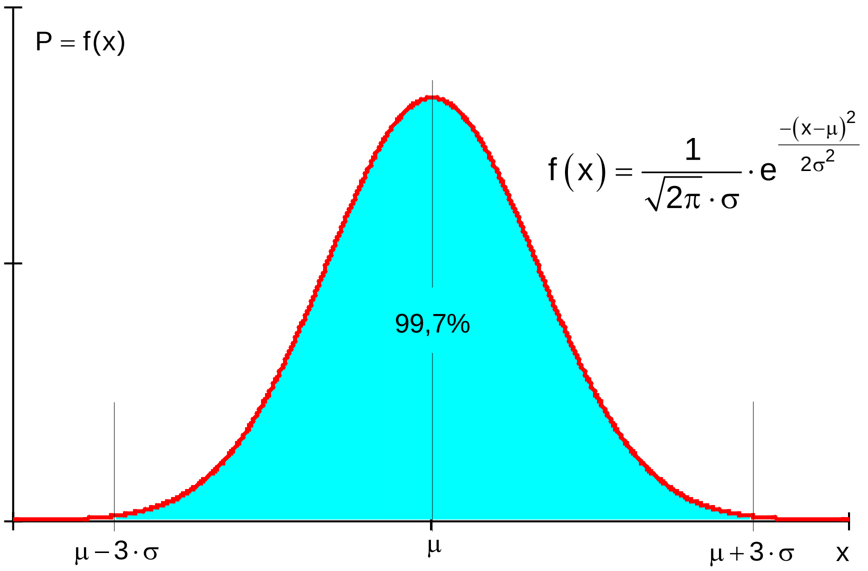
Für Sigma- Umgebungen gilt folgender Zusammenhang:



$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 0{,}683 = 68{,}3\% \quad (\text{einfache } \sigma - \text{Umgebung})$$

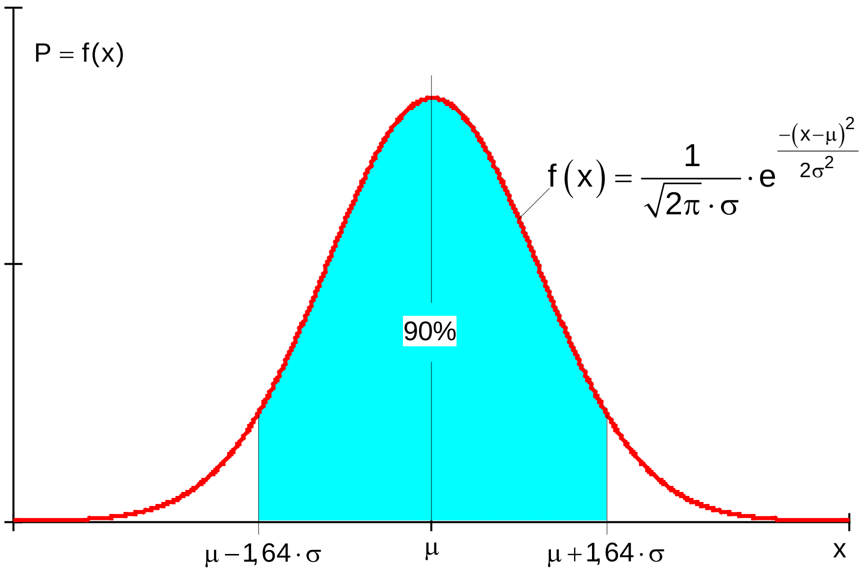


$$P(\mu - 2\cdot\sigma \le X \le \mu + 2\cdot\sigma) \approx 0{,}954 = 95{,}4\% \quad (\text{doppelte } \sigma - \text{Umgebung})$$

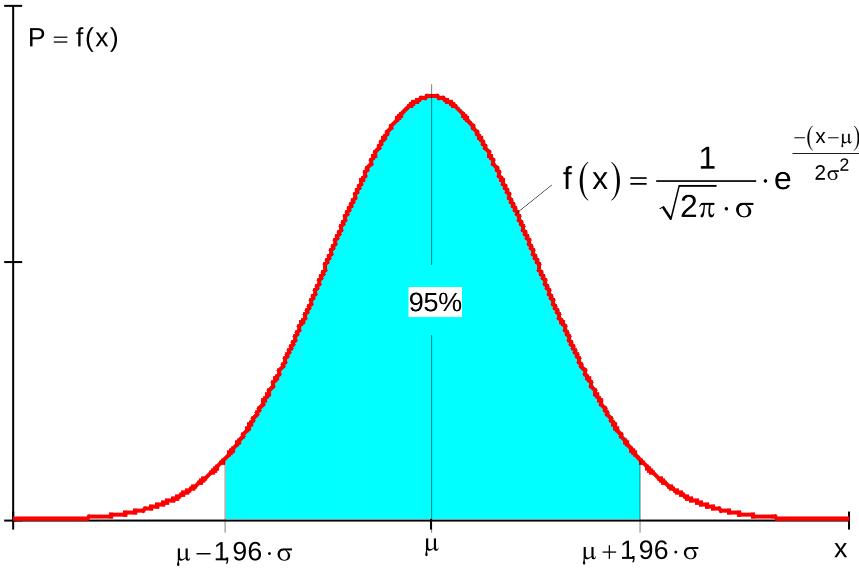


$$P(\mu - 3\cdot\sigma \le X \le \mu + 3\cdot\sigma) \approx 0{,}997 = 99{,}7\% \ \ (\text{dreifache } \sigma - \text{Umgebung})$$

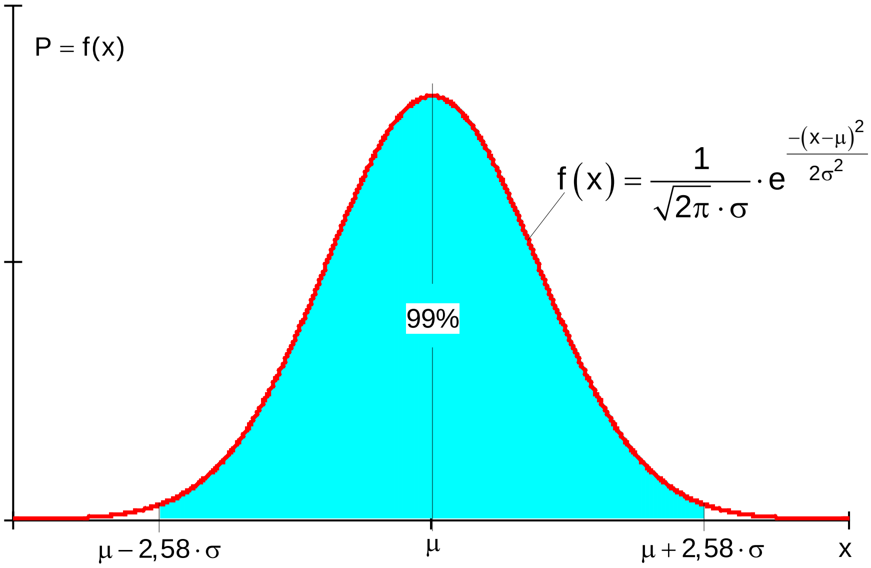
Für %- Umgebungen gilt folgender Zusammenhang:



$$P(\mu - 1{,}64\cdot\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\cdot\sigma) \approx 0{,}899 = 89{,}9\% \ \ (90\% - \text{Umgebung})$$



$$P(\mu - 1{,}96 \cdot \sigma \le X \le \mu + 1{,}96 \cdot \sigma) \approx 0{,}95 = 95\% \quad (95\% - \text{Umgebung})$$



$$P(\mu - 2{,}58 \cdot \sigma \le X \le \mu + 2{,}58 \cdot \sigma) \approx 0{,}99 = 99\% \quad (99\% - \text{Umgebung})$$

In der Literatur hat man sich auf folgende Umgebungswahrscheinlichkeiten geeinigt:

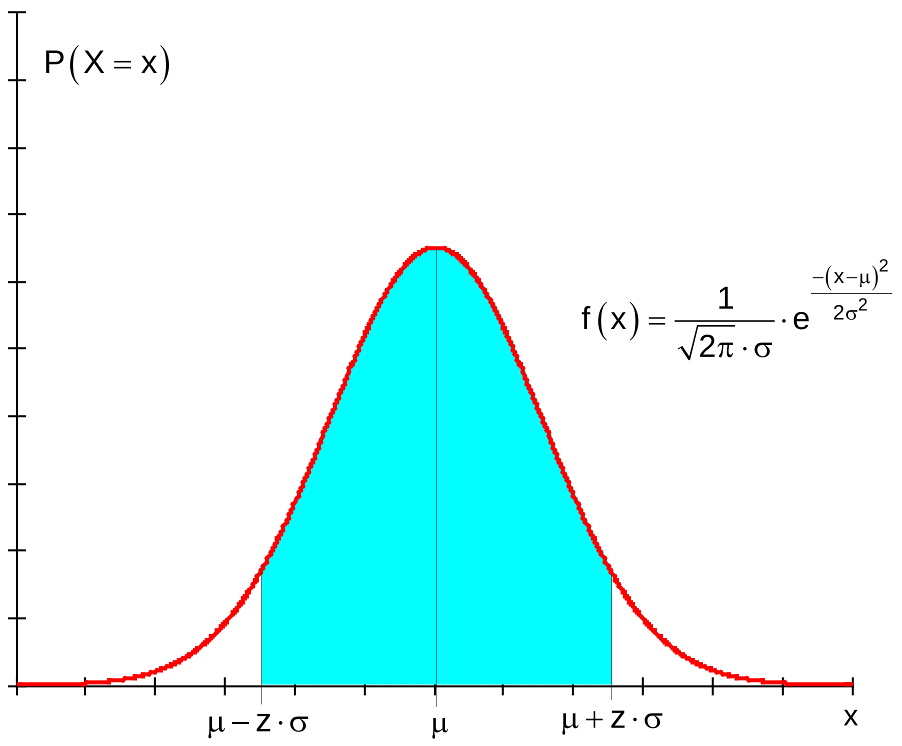
Radius der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Radius der Umgebung
$1\cdot\sigma$	0,68	0,90	$1{,}64\cdot\sigma$
$2\cdot\sigma$	0,955	0,95	$1{,}96\cdot\sigma$
$3\cdot\sigma$	0,997	0,99	$2{,}58\cdot\sigma$

Da die Histogrammform der Binomialverteilung sich nur für entsprechend große n der Form der Normalverteilung immer mehr nähert, gilt folgendes Kriterium für die Verwendung der Intervallwahrscheinlichkeiten der Normalverteilung.

Falls die Bedingung $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} > 3$ erfüllt ist (Laplace- Bedingung), liefert die Näherung durch die Normalverteilung hinreichend genaue Intervallwahrscheinlichkeiten.

Bislang war für jede Binomialverteilung mit einem bestimmten n und einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p jeweils eine Tabelle mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten nötig, um Umgebungswahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Falls nun die Werte einer Binomialverteilung die Laplace- Bedingung erfüllen, dürfen Tabellenwerte der Normalverteilung benutzt werden.
Die Laplace- Bedingung ist in jedem Fall vorher zu überprüfen.

Für den Fall, dass der Umgebungsradius in Einheiten von Sigma angegeben wird, gilt folgender Zusammenhang:



Der Umgebungsradius vom Erwartungswert wird als Vielfaches in Einheiten von Sigma ausgedrückt. Dabei ist z der Faktor, mit dem Sigma zu multiplizieren ist.
Die Wahrscheinlichkeiten solcher Sigma- Umgebungen sind in der folgenden Tabelle in Abhängigkeit vom Faktor z dargestellt.

Der wesentliche Unterschied zur Darstellung der Wahrscheinlichkeiten in einer Binomialverteilung, wie sie bisher verwendet wurde, ist, dass in der Normalverteilung die Werte auf der x- Achse als kontinuierlich angesehen werden können.
Bei der Normalverteilung handelt es sich um diskrete Werte für k.

Wahrscheinlichkeiten für σ – Umgebungen normalverteilter Zufallsvariablen
$P = P\left(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu - z \cdot \sigma\right)$ falls $\sigma > 3$ Laplace- Bedingung

z	P	z	P	z	P	z	P	z	P	z	P
0,01	0,008	0,51	0,390	1,01	0,688	1,51	0,869	2,01	0,956	2,51	0,988
0,02	0,016	0,52	0,397	1,02	0,692	1,52	0,871	2,02	0,957	2,52	0,988
0,03	0,024	0,53	0,404	1,03	0,697	1,53	0,874	2,03	0,958	2,53	0,989
0,04	0,032	0,54	0,411	1,04	0,702	1,54	0,876	2,04	0,959	2,54	0,989
0,05	0,040	0,55	0,418	1,05	0,706	1,55	0,879	2,05	0,960	2,55	0,989
0,06	0,048	0,56	0,425	1,06	0,711	1,56	0,881	2,06	0,961	2,56	0,990
0,07	0,056	0,57	0,431	1,07	0,715	1,57	0,884	2,07	0,962	2,57	0,990
0,08	0,064	0,58	0,438	1,08	0,720	1,58	0,886	2,08	0,962	2,58	0,990
0,09	0,072	0,59	0,445	1,09	0,724	1,59	0,888	2,09	0,963	2,59	0,990
0,10	0,080	0,60	0,451	1,10	0,729	1,60	0,890	2,10	0,964	2,60	0,991
0,11	0,088	0,61	0,458	1,11	0,733	1,61	0,893	2,11	0,965	2,61	0,991
0,12	0,096	0,62	0,465	1,12	0,737	1,62	0,895	2,12	0,966	2,62	0,991
0,13	0,103	0,63	0,471	1,13	0,742	1,63	0,897	2,13	0,967	2,63	0,991
0,14	0,111	0,64	0,478	1,14	0,746	1,64	0,899	2,14	0,968	2,64	0,992
0,15	0,119	0,65	0,484	1,15	0,750	1,65	0,901	2,15	0,968	2,65	0,992
0,16	0,127	0,66	0,491	1,16	0,754	1,66	0,903	2,16	0,969	2,66	0,992
0,17	0,135	0,67	0,497	1,17	0,758	1,67	0,905	2,17	0,970	2,67	0,992
0,18	0,143	0,68	0,503	1,18	0,762	1,68	0,907	2,18	0,971	2,68	0,993
0,19	0,151	0,69	0,510	1,19	0,766	1,69	0,909	2,19	0,971	2,69	0,993
0,20	0,159	0,70	0,516	1,20	0,770	1,70	0,911	2,20	0,972	2,70	0,993
0,21	0,166	0,71	0,522	1,21	0,774	1,71	0,913	2,21	0,973	2,71	0,993
0,22	0,174	0,72	0,528	1,22	0,778	1,72	0,915	2,22	0,974	2,72	0,993
0,23	0,182	0,73	0,535	1,23	0,781	1,73	0,916	2,23	0,974	2,73	0,994
0,24	0,190	0,74	0,541	1,24	0,785	1,74	0,918	2,24	0,975	2,74	0,994
0,25	0,197	0,75	0,547	1,25	0,789	1,75	0,920	2,25	0,976	2,75	0,994
0,26	0,205	0,76	0,553	1,26	0,792	1,76	0,922	2,26	0,976	2,76	0,994
0,27	0,213	0,77	0,559	1,27	0,796	1,77	0,923	2,27	0,977	2,77	0,994
0,28	0,221	0,78	0,565	1,28	0,799	1,78	0,925	2,28	0,977	2,78	0,995
0,29	0,228	0,79	0,570	1,29	0,803	1,79	0,927	2,29	0,978	2,79	0,995
0,30	0,236	0,80	0,576	1,30	0,806	1,80	0,928	2,30	0,979	2,80	0,995
0,31	0,243	0,81	0,582	1,31	0,810	1,81	0,930	2,31	0,979	2,81	0,995
0,32	0,251	0,82	0,588	1,32	0,813	1,82	0,931	2,32	0,980	2,82	0,995
0,33	0,259	0,83	0,593	1,33	0,816	1,83	0,933	2,33	0,980	2,83	0,995
0,34	0,266	0,84	0,599	1,34	0,820	1,84	0,934	2,34	0,981	2,84	0,995
0,35	0,274	0,85	0,605	1,35	0,823	1,85	0,936	2,35	0,981	2,85	0,996
0,36	0,281	0,86	0,610	1,36	0,826	1,86	0,937	2,36	0,982	2,86	0,996
0,37	0,289	0,87	0,616	1,37	0,829	1,87	0,939	2,37	0,982	2,87	0,996
0,38	0,296	0,88	0,621	1,38	0,832	1,88	0,940	2,38	0,983	2,88	0,996
0,39	0,303	0,89	0,627	1,39	0,835	1,89	0,941	2,39	0,983	2,89	0,996
0,40	0,311	0,90	0,632	1,40	0,838	1,90	0,943	2,40	0,984	2,90	0,996
0,41	0,318	0,91	0,637	1,41	0,841	1,91	0,944	2,41	0,984	2,91	0,996
0,42	0,326	0,92	0,642	1,42	0,844	1,92	0,945	2,42	0,984	2,92	0,996
0,43	0,333	0,93	0,648	1,43	0,847	1,93	0,946	2,43	0,985	2,93	0,997
0,44	0,340	0,94	0,653	1,44	0,850	1,94	0,948	2,44	0,985	2,94	0,997
0,45	0,347	0,95	0,658	1,45	0,853	1,95	0,949	2,45	0,986	2,95	0,997
0,46	0,354	0,96	0,663	1,46	0,856	1,96	0,950	2,46	0,986	2,96	0,997
0,47	0,362	0,97	0,668	1,47	0,858	1,97	0,951	2,47	0,986	2,97	0,997
0,48	0,369	0,98	0,673	1,48	0,861	1,98	0,952	2,48	0,987	2,98	0,997

0,49	0,376	0,99	0,678	1,49	0,864	1,99	0,953	2,49	0,987	2,99	0,997
0,50	0,383	1,00	0,683	1,50	0,866	2,00	0,954	2,50	0,988	3,00	0,997