

## Wahrscheinlichkeiten von Umgebungen

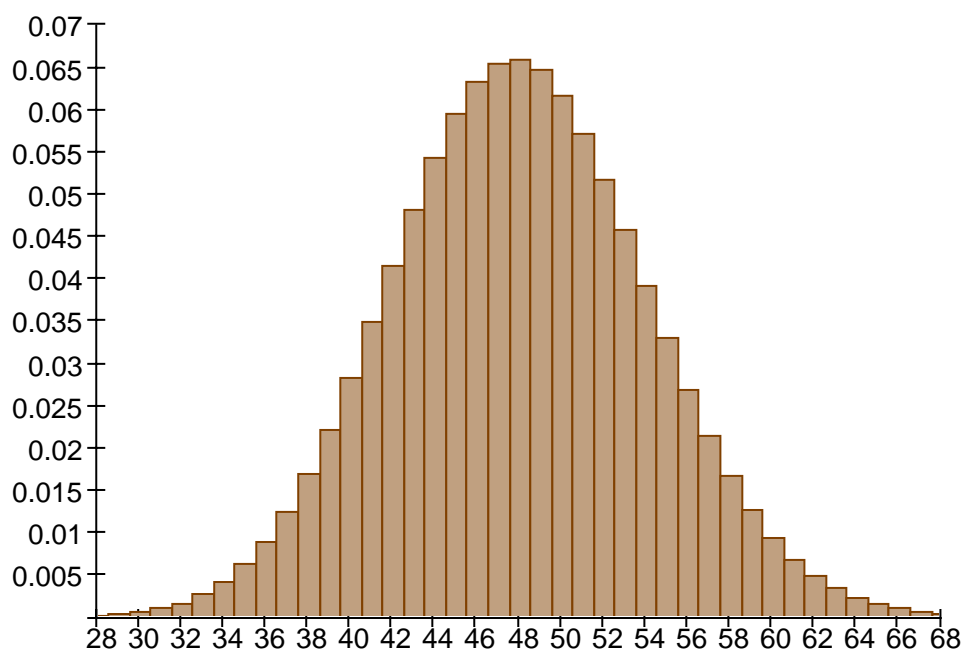
Bei einer Binomialverteilung ist der Erwartungswert der mit der größten Wahrscheinlichkeit.

In der Umgebung des Erwartungswertes befinden sich die Anzahlen der Erfolge mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten.

Je mehr die Anzahl der Erfolge sich vom Erwartungswert unterscheiden, desto geringer wird deren Wahrscheinlichkeit.

Wir interessieren uns zunächst für die nähere Umgebung des Erwartungswertes und die in diesem Bereich auftretenden Wahrscheinlichkeiten.

Folgende Verteilung soll als Beispiel dienen:



Binomialverteilung für  $n = 200$  und  $p = 0,24$

Erwartungswert :  $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,24 = \underline{\underline{48}}$

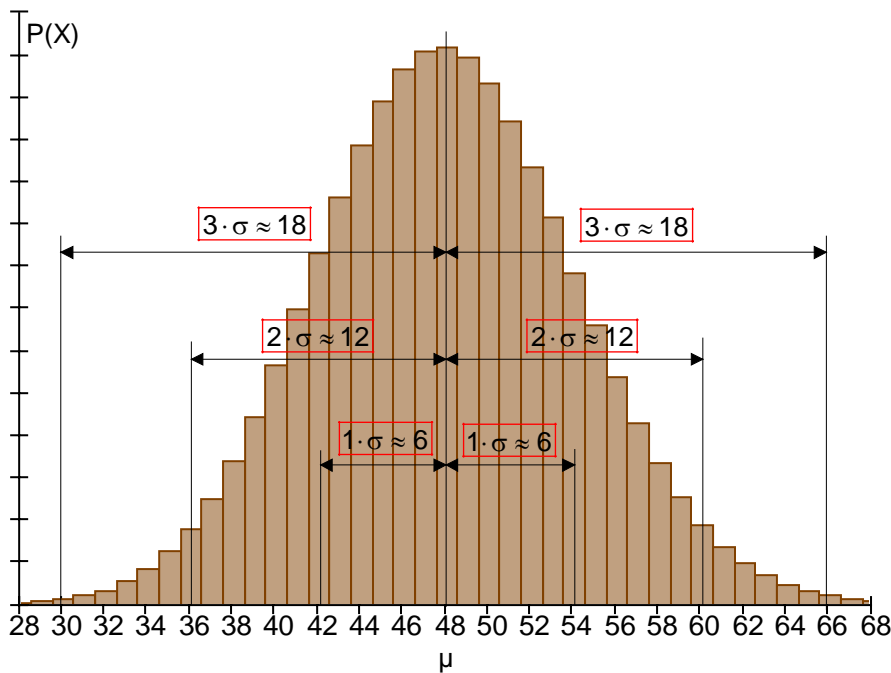
Standardabweichung :  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,24 \cdot 0,76} \approx \underline{\underline{6,04}}$

## Wahrscheinlichkeit einer Sigma- Umgebung.

Um den Erwartungswert 48 werden drei Umgebungen eingezeichnet;

1. eine  $\sigma$  – Umgebung der Breite  $\sigma \approx 6$
2. eine  $2\sigma$  – Umgebung der Breite  $2\sigma \approx 12$
3. eine  $3\sigma$  – Umgebung der Breite  $3\sigma \approx 18$

In diesen Bereichen ist die Wahrscheinlichkeit zu untersuchen.



Dazu benötigen wir zunächst eine kumulierte Wahrscheinlichkeitstabelle für den interessierenden Bereich.

k	28	29	30	31	32	33	34	35
$P(X \leq k)$	0,000	0,001	0,001	0,002	0,004	0,007	0,011	0,017
k	36	37	38	39	40	41	42	43
$P(X \leq k)$	0,026	0,038	0,055	0,077	0,106	0,140	0,182	0,230
k	44	45	46	47	48	49	50	51
$P(X \leq k)$	0,284	0,344	0,407	0,473	0,539	0,603	0,665	0,722
k	52	53	54	55	56	57	58	59
$P(X \leq k)$	0,774	0,819	0,859	0,892	0,918	0,940	0,957	0,969
k	60	61	62	63	64	65	66	67
$P(X \leq k)$	0,979	0,986	0,990	0,994	0,996	0,998	0,998	0,999

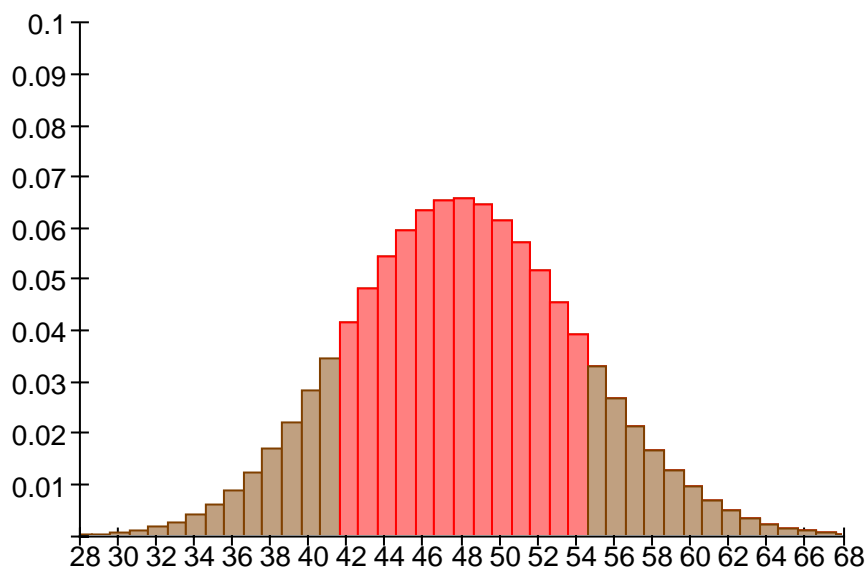
Wahrscheinlichkeit der einfachen Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

mit  $\mu = 48$  und  $\sigma \approx 6$  wird  $\mu - \sigma \approx 48 - 6 = 42$  und  $\mu + \sigma \approx 48 + 6 = 54$  und damit

$$P(42 \leq X \leq 54) = P(X \leq 54) - P(X \leq 41) = 0,859 - 0,140 = \underline{\underline{0,719}}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,719 (71,9%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [ 42 ; 54 ]. Das entspricht etwa der einfachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



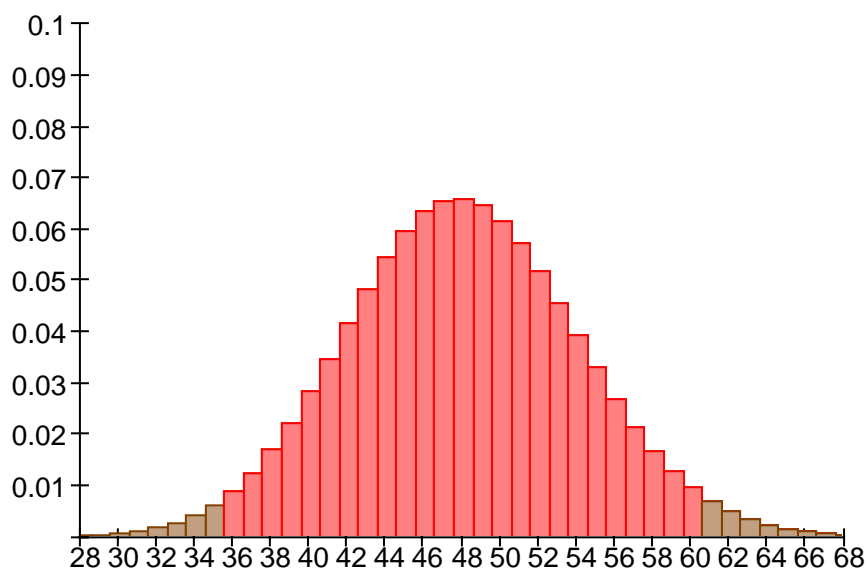
Wahrscheinlichkeit der einfachen  $\sigma$  - Umgebung  $\approx 0,719$

Wahrscheinlichkeit der doppelten Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

mit  $\mu = 48$  und  $\sigma \approx 6$  wird  $\mu - 2\sigma \approx 48 - 12 = 36$  und  $\mu + 2\sigma \approx 48 + 12 = 60$  und damit  $P(36 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 35) = 0,979 - 0,017 = \underline{\underline{0,962}}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,962 (96,2%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [ 36 ; 60 ]. Das entspricht etwa der doppelten Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



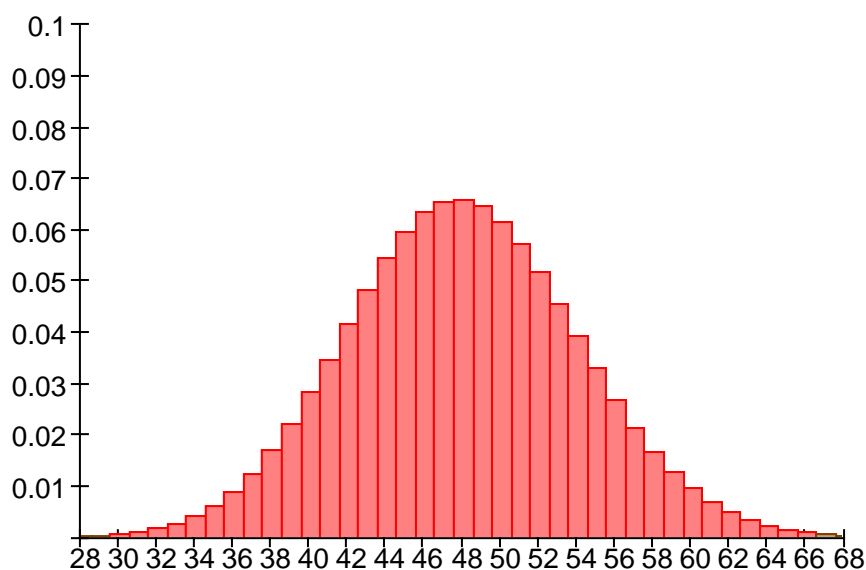
Wahrscheinlichkeit der **doppelten  $\sigma$  – Umgebung  $\approx 0,962$**

Wahrscheinlichkeit der dreifachen Sigma- Umgebung.

Zu bestimmen ist  $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$

mit  $\mu = 48$  und  $\sigma \approx 6$  wird  $\mu - 3\sigma \approx 48 - 18 = 30$  und  $\mu + 3\sigma \approx 48 + 18 = 66$  und damit  $P(30 \leq X \leq 66) = P(X \leq 66) - P(X \leq 29) = 0,998 - 0,001 = \underline{\underline{0,997}}$

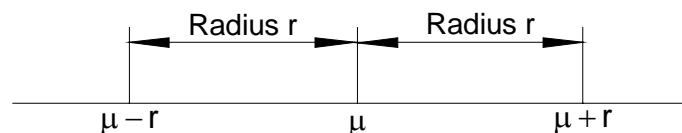
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,997 (99,7%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [ 30 ; 66 ]. Das entspricht etwa der dreifachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.



Wahrscheinlichkeit der **dreifachen  $\sigma$  - Umgebung**  $\approx 0,997$

### Umgebungsradius.

Der Umgebung des Erwartungswerts wird ein Radius zugeordnet. Darunter verstehen wir den beidseitigen Abstand vom Erwartungswert. Eine Grafik soll das erläutern.



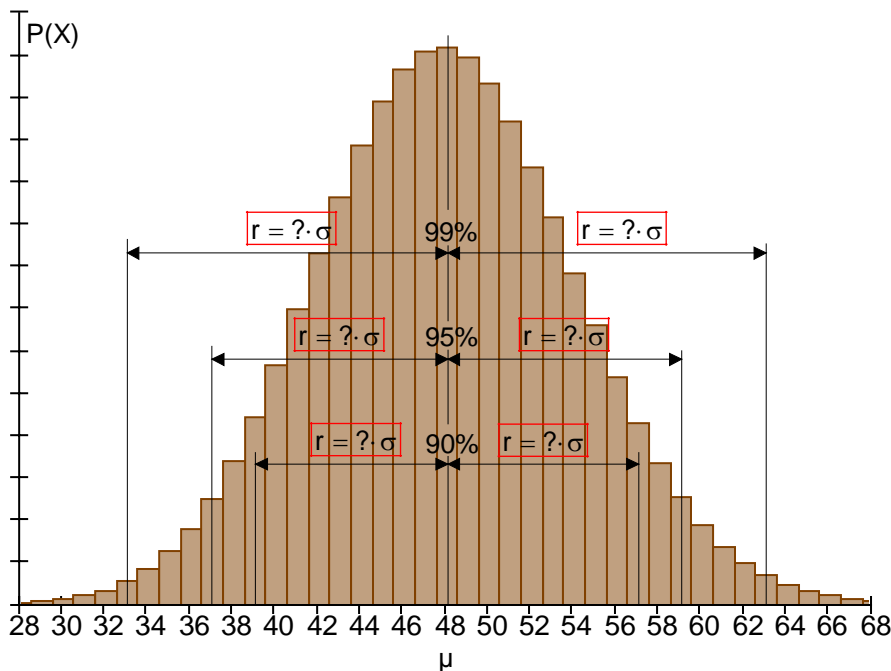
Jedem Umgebungsradius lässt sich eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnen.

Im oben angeführten Beispiel gehört zu einer einfachen Sigma- Umgebung ( $r = 6$ ) eine Umgebungswahrscheinlichkeit von etwa 0,719, zur doppelten Sigma- Umgebung ( $r = 12$ ) eine von etwa 0,962 und zur dreifachen Sigma- Umgebung ( $r = 18$ ) eine von etwa 0,997.

Umgekehrt gehört zu jeder Umgebungswahrscheinlichkeit ein bestimmter Radius.

Der Umgebungsradius bei fest vorgegebener Umgebungswahrscheinlichkeit

(90%, 95%, 99%) lässt sich wie folgt bestimmen:



Liegt für die Binomialverteilung eine Tabelle mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten vor, lässt sich das Problem durch Einschachtelung lösen. Für die zwei Sigma- Umgebung, (im obigen Beispiel  $r = 12$ ), war die Umgebungswahrscheinlichkeit etwa 96,2%.

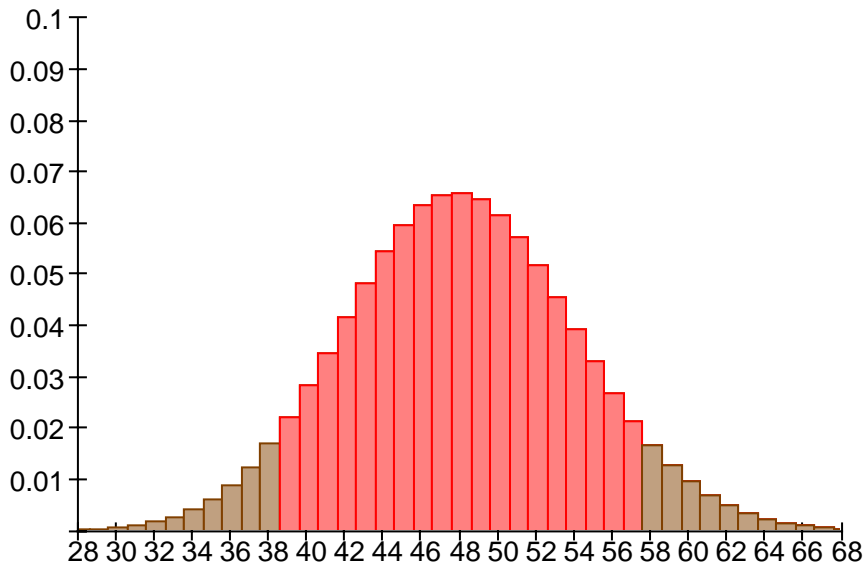
Für die 90% Wahrscheinlichkeit ist der Umgebungsradius geringer. Ansatz mit  $r = 10$ .

$\mu$	$r$	$\mu - r \leq X \leq \mu + r$	$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$
48	10	$38 \leq X \leq 58$	$0,957 - 0,038 = 0,919$
48	9	$39 \leq X \leq 57$	$0,940 - 0,055 = 0,885$

Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 9 und 10. Da es sich bei der Binomialverteilung um eine diskrete Verteilung handelt, muss man sich für den Radius entscheiden, der der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten liegt. In diesem Fall ist das der Radius  $r = 9$ . Teilt man diesen Wert durch Sigma, dann lässt sich der Radius als vielfaches von Sigma darstellen.

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{9}{6,04} \approx 1,49 \Rightarrow r \approx 1,49 \sigma$$

In einer  $1,49 \sigma$  Umgebung liegen etwa 88,5% aller Erfolge.



Radius der **90% – Umgebung**  $r \approx 9 \approx 1,49 \cdot \sigma$   $P(\mu - 9 \leq X \leq \mu + 9) \approx 0,885$

Für die 95% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit  $r = 12$  versucht.

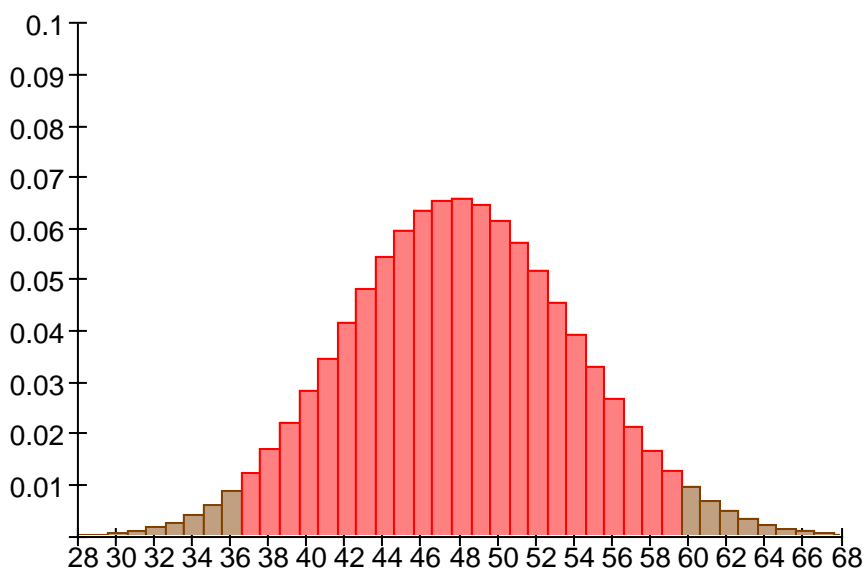
$\mu$	$r$	$\mu - r \leq X \leq \mu + r$	$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$
48	12	$36 \leq X \leq 60$	$0,979 - 0,017 = 0,962$
48	11	$37 \leq X \leq 59$	$0,969 - 0,026 = 0,943$

Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 11 und 12.

Der Radius  $r = 11$  liegt der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten.

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{11}{6,04} \approx 1,82 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 1,82 \sigma}}$$

In einer  $1,82\sigma$  Umgebung liegen etwa 94,3% aller Erfolge.



Radius der **95% – Umgebung**  $r \approx 11 \approx 1,82 \cdot \sigma$   $P(\mu - 11 \leq X \leq \mu + 11) \approx 0,943$

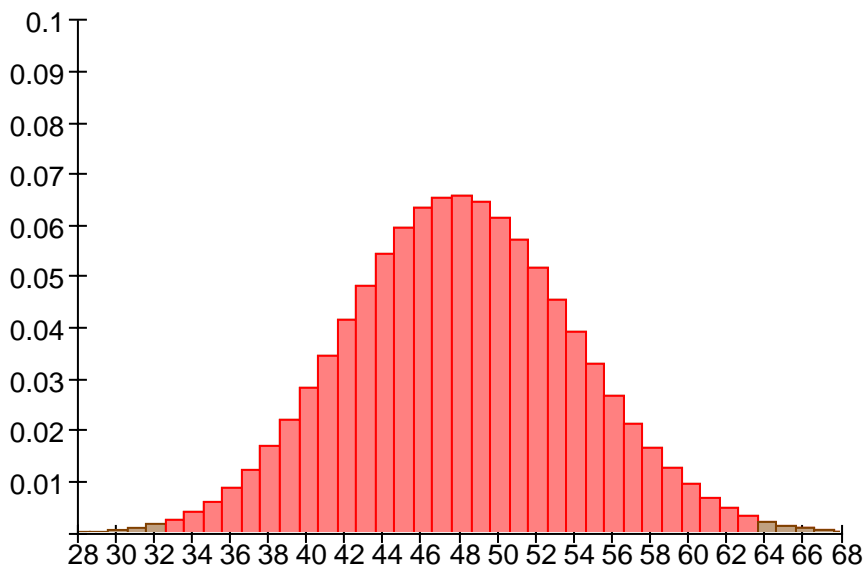
Für die 99% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit  $r = 14$  versucht.

$\mu$	$r$	$\mu - r \leq X \leq \mu + r$	$P(X \leq \mu + r) - P(X \leq \mu - r - 1)$
48	14	$34 \leq X \leq 62$	$0,990 - 0,007 = 0,983$
48	15	$33 \leq X \leq 63$	$0,994 - 0,004 = 0,99$

Der gesuchte Radius hat den Wert  $r = 15$

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{15}{6,04} \approx 2,48 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 2,48 \sigma}}$$

In einer  $2,48\sigma$  Umgebung liegen etwa 99% aller Erfolge.



Radius der **99% – Umgebung**  $r \approx 15 \approx 2,48 \cdot \sigma$   $P(\mu - 15 \leq X \leq \mu + 15) \approx 0,99$