

Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Erwartungswert

Einführungsbeispiel:

Zwei Würfel (ein blauer und ein grüner) werden 400 mal zusammen geworfen.

Die Häufigkeiten für die einzelnen Ergebnisse werden in einer Tabelle aufgelistet.

Jedem der Zahlenpaare (1 | 1) ... (6 | 6) kann deren Augensumme zugeordnet werden.

Die relativen Häufigkeiten der Augensummen sollen mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens verglichen werden.

Dieser Sachverhalt soll in einer Tabelle und in einem Säulendiagramm dargestellt werden.













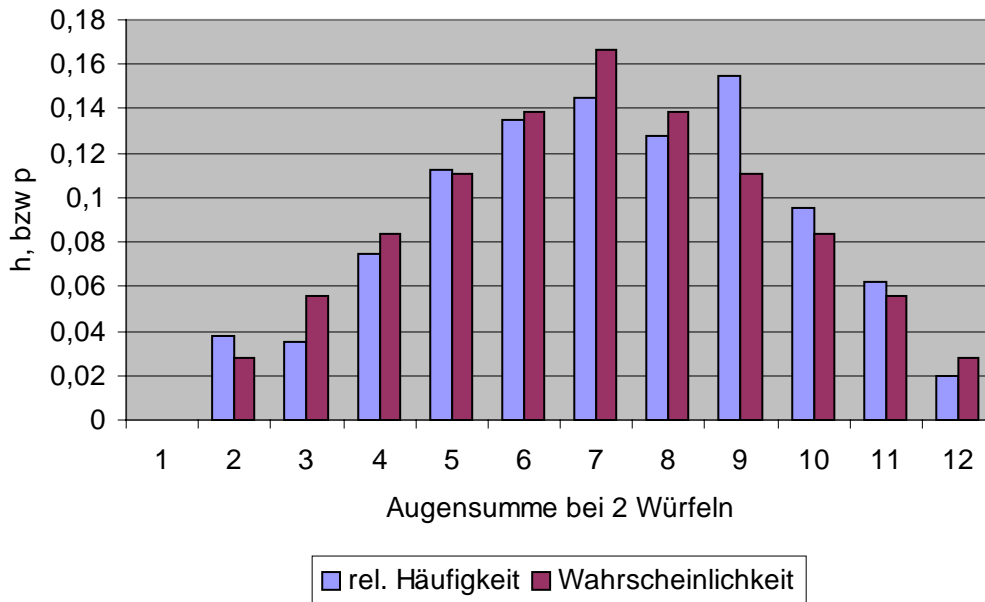
| | | blauer Würfel | | | | | |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|
| | |  |  |  |  |  |  |
| grüner Würfel |  | 15 | 9 | 12 | 13 | 12 | 11 |
| |  | 5 | 8 | 11 | 11 | 9 | 15 |
| |  | 10 | 9 | 14 | 10 | 10 | 17 |
| |  | 12 | 7 | 9 | 7 | 17 | 15 |
| |  | 10 | 14 | 7 | 13 | 9 | 14 |
| |  | 5 | 12 | 15 | 14 | 11 | 8 |

Tabelle:

| Augensumme | zugehöriges Ergebnis | abs. H | rel. h | P(X) |
|------------|-------------------------------------|--------|--------|------------------------------|
| 2 | (1 1) | 15 | 0,0375 | $\frac{1}{36} \approx 0,028$ |
| 3 | (1 2);(2 1) | 14 | 0,035 | $\frac{2}{36} \approx 0,056$ |
| 4 | (1 3);(2 2);(3 1) | 30 | 0,075 | $\frac{3}{36} \approx 0,083$ |
| 5 | (1 4);(2 3);(3 2);(4 1) | 45 | 0,1125 | $\frac{4}{36} \approx 0,111$ |
| 6 | (1 5);(2 4);(3 3);(4 2);(5 1) | 54 | 0,135 | $\frac{5}{36} \approx 0,139$ |
| 7 | (1 6);(2 5);(3 4);(4 3);(5 2);(6 1) | 58 | 0,145 | $\frac{6}{36} \approx 0,167$ |
| 8 | (2 6);(3 5);(4 4);(5 3);(6 2) | 51 | 0,1275 | $\frac{5}{36} \approx 0,139$ |
| 9 | (3 6);(4 5);(5 4);(6 3) | 62 | 0,155 | $\frac{4}{36} \approx 0,111$ |
| 10 | (4 6);(5 5);(6 4) | 38 | 0,095 | $\frac{3}{36} \approx 0,083$ |
| 11 | (5 6);(6 5) | 25 | 0,0625 | $\frac{2}{36} \approx 0,056$ |
| 12 | (6 6) | 8 | 0,02 | $\frac{1}{36} \approx 0,028$ |

Säulendiagramm



Die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Augensummen weichen im Allgemeinen nicht sehr stark von den berechneten Wahrscheinlichkeiten ab. Voraussetzung ist natürlich eine entsprechend hohe Anzahl von Versuchen.

Die Zufallsvariable

Werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen, so ist die Ergebnismenge:

$$E = \{(1|1);(1|2);(1|3); \dots; (6|6)\}$$

Ordnet man jedem Ergebnis die Augensumme zu, dann erhalten wir eine **Zufallsvariable** in der Form:

$$X((1|1)) = 2 \quad X((1|3)) = 4 \quad X((6|3)) = 9$$

$X = 4$ steht für das Ergebnis: Augensumme gleich 4, also für $\{(1|3);(2|2);(3|1)\}$

$X = 2$ steht für das Ergebnis: Augensumme gleich 2, also für $\{(1|1)\}$

| | |
|------------------------|--|
| Zufallsvariable | Unter einer Zufallsvariablen X eines Zufallsexperimentes versteht man eine Funktion , die jedem Ergebnis e_i der Ergebnismenge E dieses Experimentes eine Zahl zuordnet. $X: e_i \rightarrow X(e_i)$ in Analogie zur Funktion f mit $f: x \rightarrow f(x)$ |
|------------------------|--|

Wertetabelle einer Zufallsvariablen für den Wurf zweier Würfel, deren Augenzahl addiert wird.

| | | | | | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|
| Ergebnis | (1 1) | (1 2) | (2 1) | (1 3) | (2 2) | (3 1) | ... | (5 6) | (6 5) | (6 6) |
| $X(e_i) = x_i$ | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | ... | 11 | 11 | 12 |

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wird beim werfen mit zwei Würfeln jedem Ergebnis die Augensumme zugeordnet, so entsteht die Zufallsvariable X.

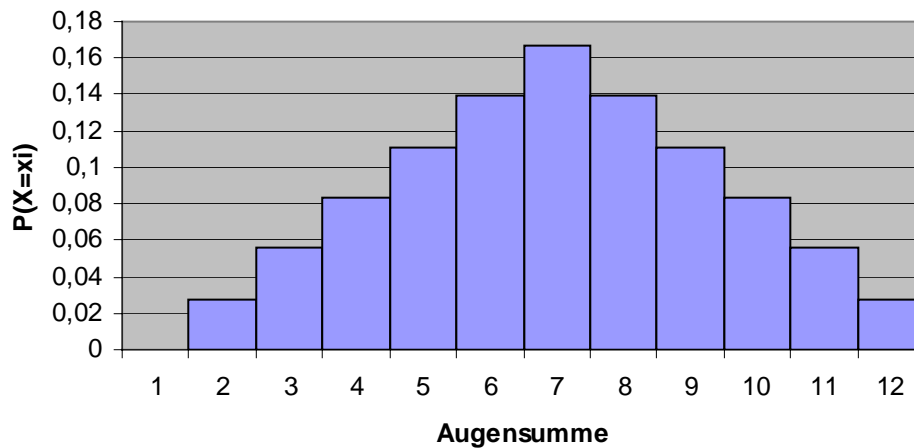
Ordnet man nun jedem Wert dieser Zufallsvariablen ihre Wahrscheinlichkeit zu, so entsteht eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (Wahrscheinlichkeitsfunktion).

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Verteilung der Zufallsgröße kann man durch eine Tabelle und ein **Histogramm** darstellen.

Tabelle:

| x_i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Histogramm



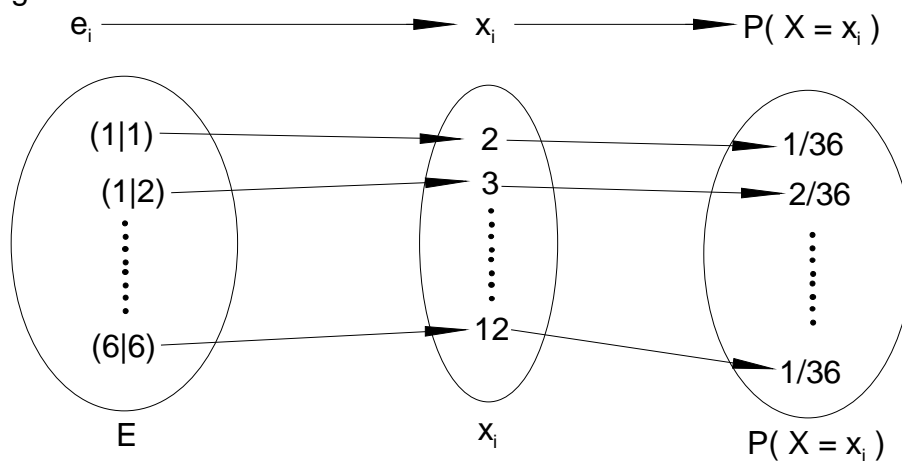
Wahrscheinlichkeitsverteilung

Unter einer **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (Wahrscheinlichkeitsfunktion) f der Zufallsvariablen X versteht man die Funktion f mit

$$f : x_i \rightarrow P(X = x_i)$$

Der Funktionswert $f(x) = P(X = x_i)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert x_i annimmt.

Funktionsdarstellung zum Beispiel werfen zweier Würfel, deren Augensumme gebildet wird.



Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit möchte man z. B. bei Glücksspielen Aussagen über den zu erwartenden Gewinn bzw. Verlust machen.

Es stellt sich die Frage: Welchen Gewinn pro Spiel kann man bei häufiger Durchführung erwarten?

Zur Veranschaulichung betrachten wir wieder die Augensumme der zwei Würfel. Man könnte ein Glücksspiel daraus machen, indem man folgende Regel aufstellt:

Regel: Die in einem Wurf erreichte Augensumme wird in € ausgezahlt.

Der Betreiber des Spiels muss sich natürlich Gedanken darüber machen, wie hoch der Einsatz pro Spiel sein muss, damit er keinen Verlust erleidet. Dazu muss er wissen, welchen Betrag er im Mittel pro Spiel bei sehr vielen Spielen auszuzahlen hat. So hoch muss auch mindestens der Einsatz sein.

Ähnlich wie bei der Mittelwertbildung aus einer Häufigkeitsverteilung in der beschreibenden Statistik kann man durch Multiplikation der Auszahlungsbeträge mit ihren Wahrscheinlichkeiten einen Wert bilden.

Diesen Wert nennen wir **Erwartungswert**.

Für unser Beispiel bedeutet der Wert 7, dass bei einer hohen Anzahl von Spielen im Mittel 7€ pro Spiel auszuzahlen sind.

| x_i | $P(X = x_i)$ | $x_i \cdot P(X = x_i)$ |
|-------|-----------------------|---|
| 2 | $\frac{1}{36}$ | $2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$ |
| 3 | $\frac{2}{36}$ | $3 \cdot \frac{2}{36} = \frac{6}{36}$ |
| 4 | $\frac{3}{36}$ | $4 \cdot \frac{3}{36} = \frac{12}{36}$ |
| 5 | $\frac{4}{36}$ | $5 \cdot \frac{4}{36} = \frac{20}{36}$ |
| 6 | $\frac{5}{36}$ | $6 \cdot \frac{5}{36} = \frac{30}{36}$ |
| 7 | $\frac{6}{36}$ | $7 \cdot \frac{6}{36} = \frac{42}{36}$ |
| 8 | $\frac{5}{36}$ | $8 \cdot \frac{5}{36} = \frac{40}{36}$ |
| 9 | $\frac{4}{36}$ | $9 \cdot \frac{4}{36} = \frac{36}{36}$ |
| 10 | $\frac{3}{36}$ | $10 \cdot \frac{3}{36} = \frac{30}{36}$ |
| 11 | $\frac{2}{36}$ | $11 \cdot \frac{2}{36} = \frac{22}{36}$ |
| 12 | $\frac{1}{36}$ | $12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{12}{36}$ |
| | Erwartungswert $E(X)$ | $\frac{252}{36} = 7$ |

Der Betreiber des Spiels muss also mindestens einen Einsatz von 7€ pro Spiel verlangen, damit er keinen Verlust erleidet.

Die Auszahlungsbeträge oder auch Ausspielungen entsprechen der Zufallsvariablen X mit den Werten: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Nun betrachten wir das Spiel aus der Sicht eines Spielers, der pro Spiel 7€ Einsatz zahlen muss. Für ihn berechnet sich der Gewinn aus:

Gewinn = Ausspielung – Einsatz.

Der Gewinn entspricht nun einer Zufallsvariablen, die wir Y nennen, also

Y mit den Werten: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5

Damit lässt sich nun der Erwartungswert für den Gewinn ermitteln.

$$E(Y) = -5 \cdot \frac{1}{36} - 4 \cdot \frac{2}{36} - 3 \cdot \frac{3}{36} - 2 \cdot \frac{4}{36} - 1 \cdot \frac{5}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} + 2 \cdot \frac{4}{36} + 3 \cdot \frac{3}{36} + 4 \cdot \frac{2}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} = 0$$

Der Erwartungswert für einen Gewinn ist 0. Das bedeutet, auf lange Sicht gewinnt der Spieler nichts. Aber er verliert auch nichts. Die Chancen sind ausgeglichen.

| | |
|-----------------------------|---|
| Erwartungswert von X | <p>Hat eine Zufallsvariable X die Werte $x_1; x_2; \dots; x_n$ dann heißt:</p> $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$ <p>Erwartungswert von X</p> |
|-----------------------------|---|

| | |
|---------------|--|
| Merke: | <p>Ist $E(X) > 0$, so nennt man das Spiel günstig für den Spieler. Ist $E(X) = 0$, so nennt man das Spiel fair. Ist $E(X) < 0$, so nennt man das Spiel ungünstig (unfair) für den Spieler.</p> |
|---------------|--|

Zuordnung eindeutig, erwartungswert, mittelwert machen!!!!!!

Bemerkungen zum Erwartungswert:

Der Erwartungswert ist der zu erwartende Mittelwert von X in einer Reihe von Zufallsversuchen. Während sich der Mittelwert – eine Größe aus der beschreibenden Statistik – auf die Vergangenheit bezieht, also auf Werte, die in einer Stichprobe tatsächlich aufgetreten sind, beschreibt der Erwartungswert eine Größe, die sich auf die Zukunft bezieht, also auf eine Größe, mit der auf lange Sicht zu rechnen ist.

Statt $E(X)$ schreibt man auch μ_x oder kürzer μ .

Statt $P(X = x_i)$ schreibt man auch p_i .

Wie beim Mittelwert gehört auch der Erwartungswert in vielen Fällen nicht zu den Werten die die Zufallsvariable X annehmen kann.

Beispiel:

Auf dem Schulhof eines Berufskollegs findet trotz Verbotes hin und wieder ein interessantes Glücksspiel statt.

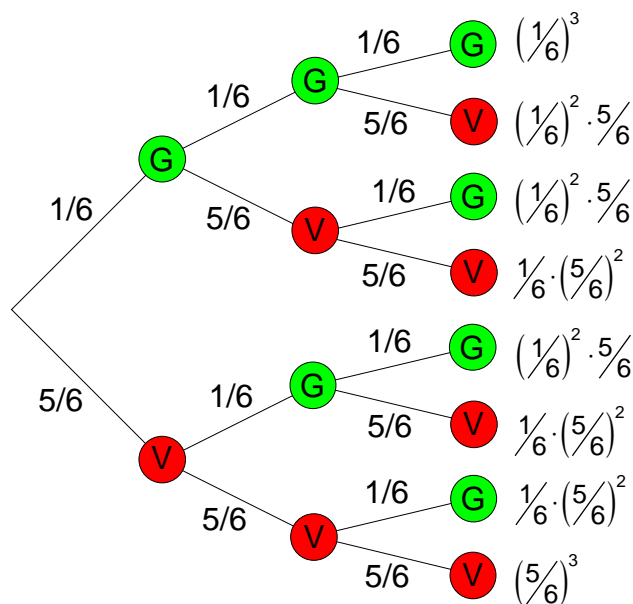
Spielregeln: Der Einsatz pro Spiel beträgt 2€
Der Spieler setzt zuerst eine der Zahlen 1, 2, 3, ... , 6.
Anschließend wirft er dreimal mit einem Würfel.
Fällt die gesetzte Zahl nicht, ist der Einsatz verloren.
Fällt die gesetzte Zahl einmal, so erhält er seinen Einsatz zurück.
Fällt die gesetzte Zahl zweimal, so erhält er den doppelten Einsatz.
Fällt die gesetzte Zahl dreimal, so erhält er den dreifachen Einsatz.

Die wohl wichtigste Frage, die sich bei diesem Spiel stellt, ist die Frage nach den Gewinnaussichten. Dies möchten alle Schüler und Schülerinnen wissen, und zwar die, die spielen und die, die die Bank haben. Diese Frage lässt sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung beantworten.

Die Zufallsvariable X ist der Nettogewinn, das ist der an den Spieler auszuzahlende Betrag abzüglich des Einsatzes von 2€.

Mit Hilfe des dreistufigen Baumdiagramms und der Pfadregel errechnet man die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn bzw. einen Verlust. Es gilt: G = Gewinn, V = Verlust.

| x_i | $P(X = x_i)$ |
|-------|--|
| -2 | $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,5787$ |
| 0 | $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,3472$ |
| 2 | $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \approx 0,0694$ |
| 4 | $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0,00463$ |



Zur Berechnung der Gewinnaussichten multipliziert man die Werte der Zufallsvariablen mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und addiert die Ergebnisse:

| x_i | $P(X = x_i)$ | $x_i \cdot P(X = x_i)$ |
|-------|--|-------------------------|
| -2 | $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ | $-\frac{250}{216}$ |
| 0 | $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$ | 0 |
| 2 | $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$ | $\frac{30}{216}$ |
| 4 | $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ | $\frac{4}{216}$ |
| | Mittelwert | $-\frac{216}{216} = -1$ |

Die errechnete Zahl von -1 sagt aus, dass langfristig, also bei vielen Wiederholungen des Spiels ein Verlust von 1 Euro pro Spiel für den Spieler zu erwarten ist. Diesen Betrag kassiert natürlich die Bank.

Man bezeichnet das Spiel aus diesem Grund auch als unfair, da langfristig Gewinn und Verlust nicht ausgeglichen werden.

Gewinn und Verlust wären bei einem Mittelwert von 0 ausgeglichen. Das wäre dann ein faires Spiel. Das könnte man z.B. durch eine Gewinnerhöhung erreichen.

Übung: Der Erwartungswert, bei dem oben vorgestellten Würfelspiel war $E(X) = -1$. Das Spiel ist also unfair.
 Wie hoch müsste der Einsatz für ein Spiel sein, damit man das Spiel als fair bezeichnen könnte?
 Die Auszahlungen bleiben vom Betrag her gleich:
 Fällt die gesetzte Zahl nicht, ist die Auszahlung 0€
 Fällt die gesetzte Zahl einmal, so ist die Auszahlung 2€
 Fällt die gesetzte Zahl zweimal, so ist die Auszahlung 4€
 Fällt die gesetzte Zahl dreimal, so ist die Auszahlung 6€

Lösung: Fair ist das Spiel dann, wenn auf lange Sicht genau soviel ausgespielt wird, wie eingenommen wird.
 Dazu berechnen wir den Erwartungswert der Auszahlungen.

$E(X) = 1$ bedeutet, dass über lange Sicht im Mittel 1€ pro Spiel ausgezahlt wird.

Bei einem Einsatz von ebenfalls 1€ pro Spiel, ist das Spiel fair.

| x_i | $P(X = x_i)$ | $x_i \cdot P(X = x_i)$ |
|-----------------------|--|------------------------|
| 0 | $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ | 0 |
| 2 | $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$ | $\frac{150}{216}$ |
| 4 | $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$ | $\frac{60}{216}$ |
| 6 | $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ | $\frac{6}{216}$ |
| Erwartungswert $E(X)$ | | $\frac{216}{216} = 1$ |

Übung: Jedes Los gewinnt !
 Bei der Abi - Abschlussfeier muss jeder der 50 Teilnehmer ein Los kaufen. Der 1. Preis hat einen Wert von 100€, der 2. von 25€ und der 3. von 10€. Jeder, der keinen dieser Gewinne bekommt, erhält einen Trostpreis in Höhe von 1€
 Wie teuer müsste ein Los sein, damit Einnahmen und Ausgaben übereinstimmen?
 Jedes Los wird für 5€ verkauft. Der Erlös geht ans Friedensdorf.
 Wie groß ist der Erlös?

überprüfen ziehen ohne zurücklegen

Lösung: Der Erwartungswert wird berechnet:
 $E(X) = 3,64$ bedeutet, dass jedes Los 3,65€ kosten muss, damit die Ausgaben gedeckt werden.

Bei einem Lospreis von 5€ und 50 verkauften losen entsteht ein Gewinn von $50 \cdot (5 - 3,64) = 68 \text{ €}$
 Dieser Betrag geht ans

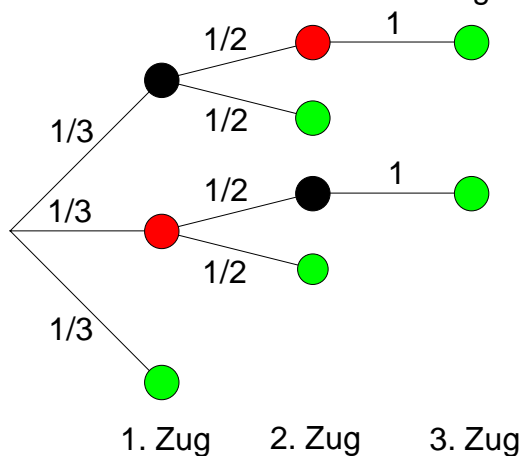
| x_i | $P(X = x_i)$ | $x_i \cdot P(X = x_i)$ |
|-----------------------|-----------------|-------------------------|
| 100 | $\frac{1}{50}$ | $\frac{100}{50}$ |
| 25 | $\frac{1}{50}$ | $\frac{25}{50}$ |
| 10 | $\frac{1}{50}$ | $\frac{10}{50}$ |
| 1 | $\frac{47}{50}$ | $\frac{47}{50}$ |
| Erwartungswert $E(X)$ | | $\frac{182}{50} = 3,64$ |

Friedensdorf.

Übung: Eine Urne enthält eine rote, eine schwarze und eine grüne Kugel.
 Es wird solange ohne zurücklegen eine Kugel gezogen, bis eine grüne Kugel erscheint.
 Wird die grüne Kugel im 1. Zug gezogen, so ist die Auszahlung 2€
 Wird die grüne Kugel im 2. Zug gezogen, so ist die Auszahlung 1€
 Wird die grüne Kugel im 3. Zug gezogen, so ist die Auszahlung 0€
 Wie hoch muss der Einsatz sein, damit es sich um ein faires Spiel handelt?

Lösung:

Mit Hilfe des dreistufigen Baumdiagramms und der Pfadregel errechnet man die Wahrscheinlichkeiten dafür eine grüne Kugel zu ziehen.



| Zug | Ergebnisse | P | Auszahlung X |
|-----|-------------|---|--------------|
| 1 | (g) | $\frac{1}{3}$ | 2€ |
| 2 | (sg);(rg) | $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ | 1€ |
| 3 | (srg);(rsg) | $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ | 0€ |

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Der Erwartungswert der Auszahlung ist $E(X) = 1$.

Wenn es sich um ein faires Spiel handeln soll, muss der Einsatz ebenfalls 1€ betragen.