

Wahrscheinlichkeit bei verknüpften Ereignissen

Bislang wurden nur Wahrscheinlichkeiten einzelner Ereignisse berechnet. Ereignisse können aber auch verknüpft werden.

In einem Abiturjahrgang am Berufskolleg sind 100 Schüler/innen, davon haben 87 Spanisch (S) und 75 Französisch (F) gelernt, 70 beherrschen beide Fremdsprachen.

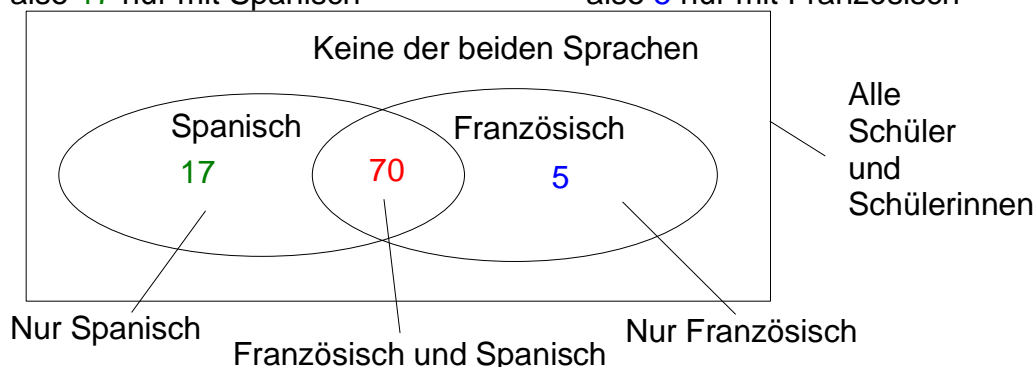
- Wie viele Schüler/innen lernten Französisch oder Spanisch?
(oder bedeutet hier Französisch, Spanisch oder beides)
- Ein Schüler/in wird zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er/sie Spanisch oder Französisch gelernt hat.
(oder bedeutet hier Französisch, Spanisch oder beides)

Lösung:

- Man kann nun nicht einfach die Zahlen für Spanisch und Französisch addieren, denn dann käme man auf eine Schülerzahl von $87 + 75 = 162$. Das ist deshalb falsch, weil man die Schüler/innen die Spanisch und Französisch gelernt haben damit doppelt zählt.

87 Schüler/innen mit Spanisch
davon **70** mit Spanisch und
Französisch,
also **17** nur mit Spanisch

75 Schüler/innen mit Französisch
davon **70** mit Spanisch und
Französisch,
also **5** nur mit Französisch



Die 70 Schüler/innen mit Spanisch und Französisch sind sowohl in den 87 mit Spanisch als auch in den 75 mit Französisch enthalten. Addiert man die Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch (87) und die Anzahl der Schüler/innen mit Französisch (75), so hat man die Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch und Französisch doppelt gezählt. Daher muss man 70 von der Summe (162) subtrahieren.

Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch oder Französisch
 $87 + 75 - 70 = 92$ bzw. $17 + 70 + 5 = 92$

Das bedeutet, 8 Schüler/innen lernten in der Gymnasialen Oberstufe keine der beiden Fremdsprachen (Spracherfüller in Sek I).

b) Zuerst definieren wir die Ereignisse wie folgt:

S : Schüler/in hatte Spanisch

F : Schüler/in hatte Französisch

$$\text{Wahrscheinlichkeit: } P(\text{S oder F}) = \frac{87 + 75 - 70}{100} = 0,92$$

$$\text{mit Termumformung: } P(\text{S oder F}) = \frac{87}{100} + \frac{75}{100} - \frac{70}{100} = 0,87 + 0,75 - 0,70 = 0,92$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P(S)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P(F)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P(S \text{ und } F)}$

Aus diesem Beispiel erkennen wir die **Summenregel**, auch **Additionsregel** genannt.

Summenregel (Additionsregel)	<p>Setzt sich ein Ereignis E aus den Ereignissen A und B zusammen, die sich überschneiden können, d.h. gemeinsame Ergebnisse enthalten können wie bei einer oder – Verknüpfung, dann muss man darauf achten, dass diese gemeinsamen Ereignisse nicht doppelt berücksichtigt werden.</p> <p>Sind A und B Ereignisse, und gilt $E = A \cup B$ (Oder - Ereignis), dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E</p> $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ <p>In Worten: Die Wahrscheinlichkeit eines Oder – Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse, vermindert um die Wahrscheinlichkeit des Und – Ereignisses.</p>
---	--

Beispiel:

Ein Würfel wird einmal geworfen. Es werden zwei Ereignisse festgelegt.

A: Die Augenzahl ist größer als 3 B: Die Augenzahl ist eine gerade Zahl

Ein neues Ereignis wird wie folgt festgelegt:

C: Die Augenzahl ist größer als 3 **oder** die Augenzahl ist eine gerade Zahl.

Das Ereignis C ist eine **Oder – Verknüpfung** aus A und B.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(C)$.

Zuerst bilden wir die Ergebnismengen von A und B.

$$A = \{4; 5; 6\} \quad B = \{2; 4; 6\}$$

Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Ergebnismenge von $A \cap B$. $A \cap B = \{4; 6\}$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Die Richtigkeit des Ergebnisses lässt sich leicht dadurch überprüfen, indem man die Ergebnismenge von $C = A \cup B$ bildet und deren Wahrscheinlichkeit bestimmt.

$$C = A \cup B = \{2; 4; 5; 6\} \Rightarrow P(C) = P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Übung: Ein Würfel wird einmal geworfen. Es werden zwei Ereignisse festgelegt.
 A: Die Augenzahl ist größer als 4
 B: Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl und größer als 1
 Ein neues Ereignis wird wie folgt festgelegt:
 C: Die Augenzahl ist größer als 4 **oder** Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl und größer als 1.
 Das Ereignis C ist eine **Oder – Verknüpfung** aus A und B.
 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(C)$.

Lösung: Zuerst bilden wir die Ergebnismengen von A und B.

$$A = \{5; 6\} \quad B = \{3; 5\}$$

Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Ergebnismenge von $A \cap B$. $A \cap B = \{5\}$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Beispiel:

Ein Würfel wird einmal geworfen. Es werden zwei Ereignisse festgelegt.

A: Die Augenzahl ist kleiner als 4 B: Die Augenzahl ist 4 oder 5

Ein neues Ereignis wird wie folgt festgelegt:

C: Die Augenzahl ist kleiner als 4 **oder** die Augenzahl ist 4 oder 5.

Das Ereignis C ist eine **Oder – Verknüpfung** aus A und B.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(C)$.

Zuerst bilden wir die Ergebnismengen von A und B.

$$A = \{1;2;3\} \quad B = \{4;5\}$$

Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Ergebnismenge von $A \cap B$. $A \cap B = \{ \} = \emptyset$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

Bemerkung:

Ist $A \cap B = \{ \} = \emptyset$ dann gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Übung: Eine Karte wird aus einem Spiel mit 32 Karten gezogen (Skat).

Welche Wahrscheinlichkeit hat das folgende Ereignis?

E: Die gezogene Karte ist eine Bildkarte oder eine Kreuzkarte.

Lösung: Das Ereignis E ist eine Oder - Verknüpfung aus den Ereignissen

A: Die gesuchte Karte ist eine Bildkarte

B: Die gesuchte Karte ist eine Kreuzkarte

Zuerst bestimmen wir die Anzahl der möglichen Ergebnisse von A und B.

A: Es gibt 12 Bildkarten von insgesamt 32 Karten.

B: Es gibt 8 Kreuzkarten von insgesamt 32 Karten.

Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Anzahl der möglichen Ergebnisse von $A \cap B$.

$A \cap B$: Es gibt 3 Kreuz - Bildkarten (Bube, Dame, König)

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{12}{32} \quad P(B) = \frac{8}{32} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{32}$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{3}{32} = \underline{\underline{\frac{17}{32}}}$$

<p>Zusammenfassung der bisher bekanntesten Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten</p>	<p>S sei die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments.</p> <ol style="list-style-type: none">1. Für alle Ereignisse E gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$ wobei $P(\emptyset) = 0$ und $P(S) = 1$ ist. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses liegt immer zwischen 0 und 1 und kann nicht negativ sein.2. Ist $E = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$, dann gilt: $P(E) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n)$ (Beispiel Würfel)3. Für alle Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$4. Für alle Ereignisse C gilt: $P(\bar{C}) = 1 - P(C)$ (Ereignis und Gegenereignis ergänzen sich zu 1)
---	---